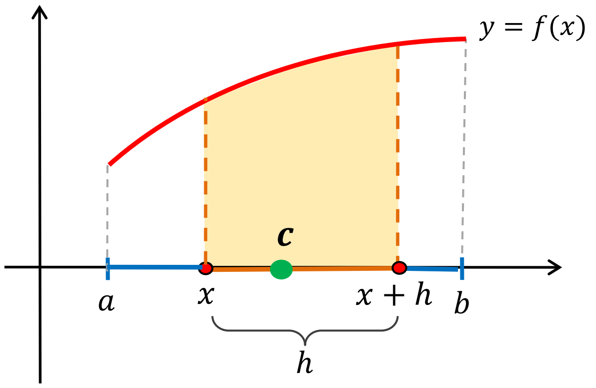
Teorema fondamentale del calcolo integrale

enunciato

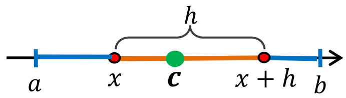
Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ una funzione detta *funzione integrale* **allora** esiste la derivata prima della funzione integrale $F(x)$ in ogni punto x dell'intervallo chiuso [a, b] e si ha: $$F'(x) = f(x)$$	

In altre parole il teorema afferma che la funzione integrale $F(x)$ così definita, è una primitiva di $f(x)$

dimostrazione

Consideriamo l'incremento h della funzione integrale $F(x)$ relativo ad un generico punto x dell'intervallo $[a,b]$	$F(x+h) - F(x)$
Tale l'incremento, per definizione di funzione integrale, è uguale a:	$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$
Per la proprietà additiva degli integrali definiti, il primo integrale si scompone nella somma dei due integrali (vedi figura in alto):	$\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$
L'incremento di $F(x)$ si scrive allora come somma di tre integrali definiti, cioè:	$F(x+h) - F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$
Semplifichiamo i termini opposti. Si ottiene che l'incremento di $F(x)$ è uguale all'integrale definito di $f(t)$ calcolato tra x e $x+h$	$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$
Applichiamo il *teorema della media* alla funzione $f(t)$ nell'intervallo $[x,\ x+h]$. Allora, esiste almeno un punto **c** dell'intervallo $[x,\ x+h]$ tale che:	$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(c)$
Cioè l'incremento di $F(x)$ è uguale al prodotto tra h ed $f(c)$	$F(x+h) - F(x) = h \cdot f(c)$
Dividiamo entrambi i membri per h. Osserviamo che il primo membro rappresenta il rapporto incrementale di $F(x)$	$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Calcoliamo il limite per h che tende a 0 di entrambi i membri	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} f(c)$
Il primo membro è per definizione la derivata prima della funzione integrale $F(x)$ nel punto x	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x)$
Il secondo membro, poiché $\boldsymbol{c}$ è compreso tra x e $x+h$ e se h tende a zero allora c tende a x, si può quindi scrivere:	$\lim\limits_{h \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x} f(c)$ 
Essendo $f(x)$ continua in $[a,b]$ per ipotesi, lo è anche in $\boldsymbol{c}$. Per definizione di funzione continua in un punto, si ha:	$\lim\limits_{h \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x} f(c) = \boldsymbol{f(x)}$
Ricostruendo la catena delle uguaglianze si ottiene la tesi:	$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

Una importante conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale è la seguente formula che permette di calcolare l'integrale definito di una funzione per mezzo dell'integrale indefinito della stessa funzione.

Calcolata una qualsiasi primitiva di $f(x)$, ad esempio $F(x)$, l'integrale definito tra a e b di $f(x)$ è uguale alla differenza dei valori assunti dalla primitiva $F(x)$ negli estremi a e b.

Formula fondamentale del calcolo integrale

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ **allora** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

dimostrazione

Consideriamo un punto $\boldsymbol{c}$ appartenente all'intervallo $[a,b]$. Per la proprietà additiva degli integrali definiti, si ha (vedi figura in alto):	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
Invertiamo gli estremi di integrazione e ricordiamo che il segno dell'integrale cambia:	$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_c^a f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
Per la definizione di funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ si ha che:	$F(a) = \int_c^a f(t)dt$ e $F(b) = \int_c^b f(t)dt$
Sostituendo:	$\int\limits_a^b f(x)dx = -F(a) + F(b)$
Ordinando i termini a secondo membro si ottiene la tesi. L'integrale definito tra a e b di $f(x)$ è uguale alla differenza dei valori assunti dalla primitiva $F(x)$ negli estremi a e b	$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$