Teorema sulla relazione tra derivabilità e continuità

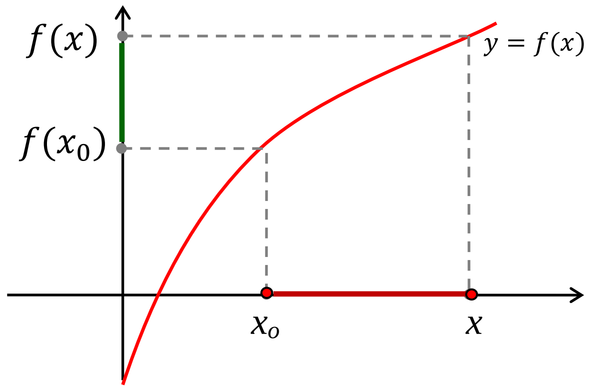
enunciato

Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto x_0 **allora** essa è ivi anche continua

Hp: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

con $f'(x_0)$ che esiste ed è finito

Th: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\,(x_0)$



dimostrazione

Consideriamo la seguente identità:	$f(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$
Calcoliamo il limite per $x \to x_0$ di entrambi i membri	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x_0) + \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \right]$
A secondo membro applichiamo i teoremi sulla somma e sul prodotto di limiti	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) + \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0}(x-x_0)$
Passiamo al calcolo dei limiti del secondo membro	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$ perché $f(x_0)$ è una costante $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ per l'ipotesi di derivabilità $\lim\limits_{x \to x_0}(x-x_0) = x_0 - x_0 = 0$ per calcolo
Per cui si ha:	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0$
Quindi la tesi	$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Il teorema NON è invertibile.

Consideriamo ad esempio la funzione $y = |x|$. Nel punto $x_0 = 0$ la funzione è continua ma non derivabile perché la derivata sinistra è diversa da quella destra, infatti $f'_-|x| = -1$ ed $f'_+|x| = 1$