Teorema inverso del criterio di parallelismo

enunciato

Se due rette parallele sono tagliate da una retta trasversale, **allora** risulta che:

- gli angoli alterni interni ed alterni esterni sono congruenti
- gli angoli corrispondenti sono congruenti
- gli angoli coniugati interni e coniugati esterni sono supplementari

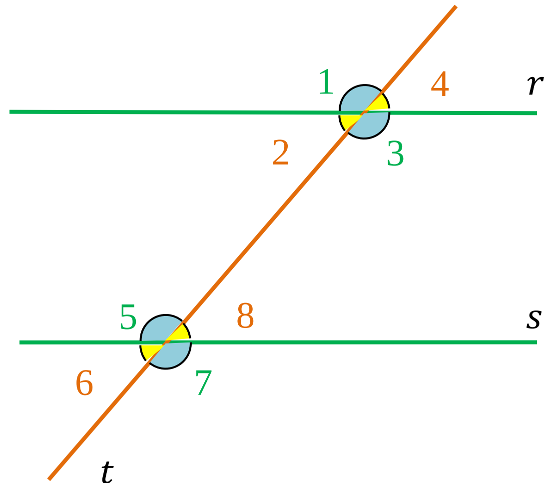
Hp: $r \parallel s$

Th: $2 \cong 8$ e $3 \cong 5$ e $1 \cong 7$ e $4 \cong 6$

$1 \cong 5$ e $2 \cong 6$ e $3 \cong 7$ e $4 \cong 8$

$2 + 5 \cong 180°$ e $3 + 8 \cong 180°$

$1 + 6 \cong 180°$ e $4 + 7 \cong 180°$

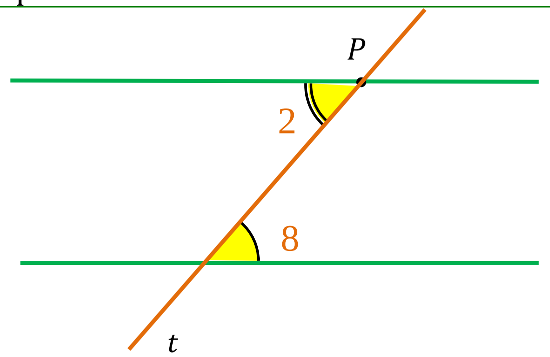


dimostrazione

il teorema si dimostra per assurdo

Nell'ipotesi che le rette r ed s sono parallele, dimostriamo che gli angoli alterni interni 2 ed 8 sono congruenti.

Supponiamo per **assurdo** che gli angoli 2 e 8 non sono congruenti e sia $2 > 8$.

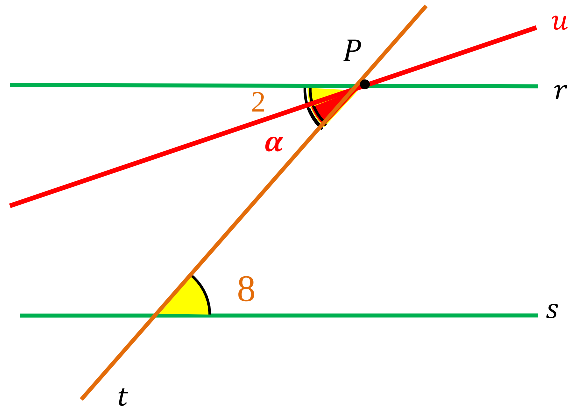


Allora esisterà una retta u passante per P che forma con la trasversale t un angolo α congruente all'angolo 8 (con α contenuto in 2).

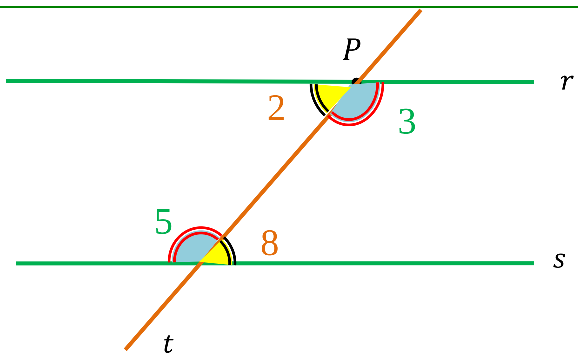
Gli angoli α ed 8 sono alterni interni delle rette u ed s tagliate dalla trasversale t, allora, per il criterio di parallelismo, u è parallela ad s.

Ciò è assurdo perché avremo due rette *distinte* r ed u entrambe parallele ad s e passanti per P, in disaccordo con il V postulato di Euclide.

Quindi gli angoli alterni interni 2 e 8 sono congruenti.



Nell'ipotesi che le rette r ed s sono parallele, per dimostrare che gli angoli alterni interni 3 e 5 sono congruenti, basta osservare che essi sono supplementari rispettivamente dei due angoli congruenti 2 e 8 e di conseguenza risulteranno congruenti.

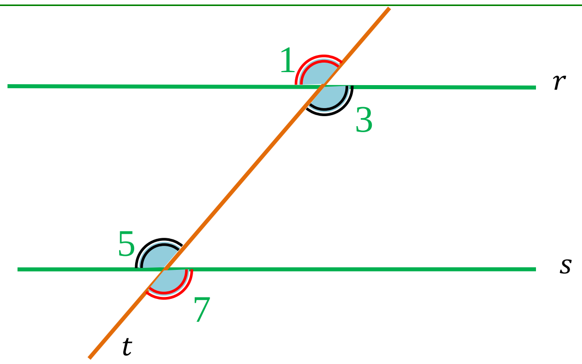


Teorema inverso del criterio di parallelismo

Nell'ipotesi che le rette r ed s sono parallele, dimostriamo che gli angoli alterni esterni 1 e 7 sono congruenti.

Essi sono congruenti perché rispettivamente opposti al vertice degli angoli congruenti 3 e 5.

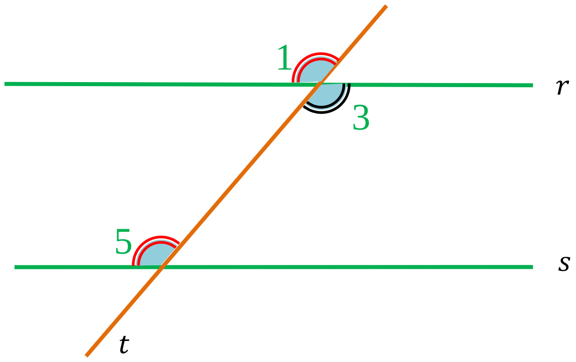
Per dimostrare la congruenza degli angoli alterni esterni 4 e 6 si ragiona in maniera simile.



Nell'ipotesi che le rette r ed s sono parallele, dimostriamo che gli angoli corrispondenti 1 e 5 sono congruenti.

L'angolo 1 è congruente a 3 perché angoli opposti al vertice. Poiché gli angoli alterni interni 3 e 5 sono congruenti per la dimostrazione precedente, allora per la proprietà transitiva anche 1 e 5 sono congruenti.

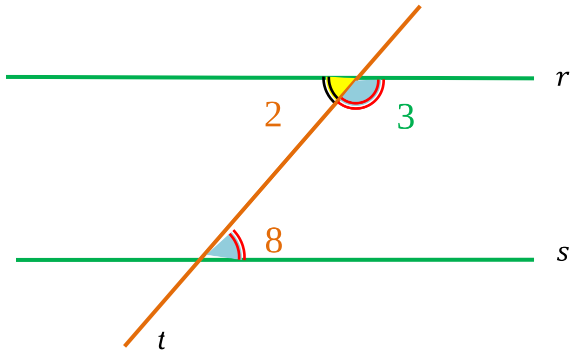
Si ragiona in modo analogo per dimostrare la congruenza delle altre coppie di angoli corrispondenti: 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8.



Nell'ipotesi che le rette r ed s sono parallele, dimostriamo che gli angoli coniugati interni 3 e 8 sono supplementari.

L'angolo 2 è adiacente all'angolo 3, quindi è suo supplementare, cioè $3 + 2 \cong 180°$. Poiché abbiamo dimostrato che 2 e 8 sono angoli congruenti, allora per transitività anche 3 e 8 sono angoli supplementari, cioè $3 + 8 \cong 180°$.

Per dimostrare che gli angoli coniugati interni 2 e 5 sono supplementari si procede allo stesso modo.



Nell'ipotesi che le rette r ed s sono parallele, dimostriamo che gli angoli coniugati esterni 1 e 6 sono supplementari.

L'angolo 1 e l'angolo 3 sono congruenti perché opposti al vertice; l'angolo 6 e l'angolo 8 sono congruenti perché opposti al vertice.

Poiché abbiamo dimostrato precedentemente che 3 e 8 sono supplementari, anche 1 e 6 risultano supplementari.

Per dimostrare che gli angoli coniugati esterni 4 e 7 sono supplementari si procede in modo analogo.