# $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale



## enunciato

| | |
|---|---|
| **$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale**<br>cioè $\sqrt{2}$ **non** si può esprimere come rapporto tra due numeri naturali $m$ ed $n$ (con $n \neq 0$) | $\sqrt{2} \neq \dfrac{m}{n}$ con $m, n \in N$ ed $n \neq 0$ |

## dimostrazione

| | |
|---|---|
| Con un **ragionamento per assurdo**, neghiamo la tesi e supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè che esistano due numeri naturali $\boldsymbol{m}$ ed $\boldsymbol{n}$ (con $n \neq 0$) tali che $\sqrt{2}$ sia uguale al loro rapporto. | $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ |
| Eleviamo al quadrato primo e secondo membro.<br>(ciò è corretto perché entrambi i membri sono quantità positive) | $2 = \dfrac{m^2}{n^2}$ |
| Moltiplichiamo entrambi i membri per $n^2$. | $2 \cdot n^2 = \dfrac{m^2}{n^2} \cdot n^2$ |
| Semplifichiamo $n^2$ al secondo membro.<br>L'**uguaglianza** così ottenuta è **falsa** perché il primo membro contiene il "2" un numero dispari di volte mentre il secondo membro contiene il "2" un numero pari di volte. Infatti: | $\boldsymbol{2 \cdot n^2 = m^2}$ |
| Il primo membro è formato dal prodotto di un "2" con $\boldsymbol{n^2}$. Quest'ultimo è un numero naturale elevato al quadrato e, in quanto tale, contiene il "2" un numero pari di volte *(vedi l'osservazione in basso).* Quindi, in totale, il primo membro contiene il "2" un numero **dispari** di volte. | $\boldsymbol{2 \cdot n^2}$<br>contiene il **2** un numero **dispari** di volte |
| Il secondo membro $\boldsymbol{m^2}$, essendo un numero naturale elevato al quadrato, contiene il "2" un numero **pari** di volte *(vedi l'osservazione in basso).* | $\boldsymbol{m^2}$<br>contiene il **2** un numero **pari** di volte |
| Dunque, l'uguaglianza che si ottiene **negando** la tesi è **falsa**; ciò vuol dire che la tesi **non** può essere negata, quindi deve essere **necessariamente vera** e, pertanto:<br>**$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale** | $\boldsymbol{2 \cdot n^2 \neq m^2} \longrightarrow \sqrt{2} \neq \dfrac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$ |

## osservazione

Mostriamo, con degli esempi, che l'esponente di un numero naturale elevato al quadrato è sempre un numero pari.
Ciò vuol dire che il quadrato di un **numero naturale** contiene nei suoi fattori primi il "**2**" un numero **pari** di volte.

| numero naturale | numero al quadrato | quante volte è contenuto il "**2**" |
|---|---|---|
| 2 | $4 = 2^2$ | 2 |
| 3 | $9 = 3^2$ | 0 |
| 4 | $16 = 2^4$ | 4 |
| 8 | $64 = 2^6$ | 6 |
| 10 | $100 = 2^2 \cdot 5^2$ | 2 |


© 2020 - www.matematika.it