Esempi di studio del grafico di una funzione

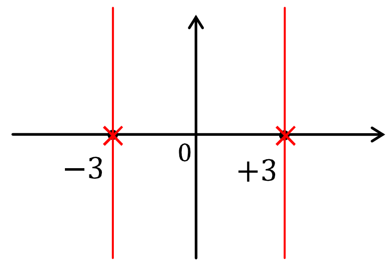
primo esempio

Studiamo la seguente funzione $$y = \frac{x}{x^2 - 9}$$

- **ricerca del dominio**

si pone il denominatore diverso da zero perché la funzione assegnata è una funzione fratta:

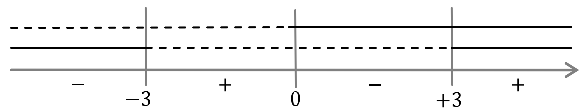
$x^2 - 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq \pm 3 \quad \rightarrow \quad \forall\, x \in \mathcal{R} - \{\pm 3\}$

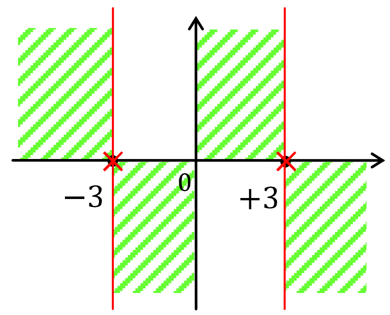


- **studio del segno**

si pone la funzione maggiore di zero e si studia la disequazione individuando le regioni di piano dove la funzione esiste ed è positiva o negativa. Si cancellano le regioni di piano dove la funzione non esiste:

$$\frac{x}{x^2-9} > 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < -3 \ \cup \ x > 3 \end{cases}$$





- **studio delle intersezioni con gli assi cartesiani**

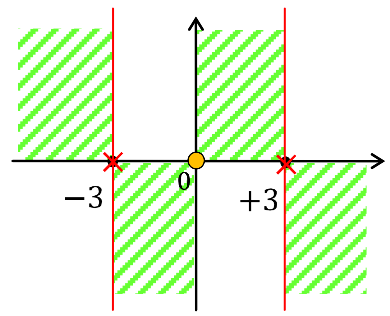
dall'osservazione del grafico dello studio del segno è evidente che la funzione ha un solo punto di intersezione con gli assi, coincidente con l'origine (0,0).

Solo come esercizio algebrico, studiamo l'intersezione della funzione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{x^2-9} \\ y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{x^2-9} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad P(0{,}0)$$

e l'intersezione della funzione con l'asse y:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{x^2-9} \\ x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad y = \frac{0}{-9} \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad P(0{,}0)$$



- **studio delle simmetrie**

dall'osservazione del grafico dello studio del segno è evidente che la funzione non è pari mentre potrebbe essere dispari. Verifichiamolo algebricamente sostituendo la x con $-x$ nel testo della funzione e sviluppando i calcoli:

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 - 9} = \frac{-x}{x^2 - 9} \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{x}{x^2-9} \quad \text{quindi} \quad f(-x) \neq f(x) \ \text{e non è pari}$$

Verifichiamo se la funzione è dispari raccogliendo il – nell'espressione di $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2-9} = -\left(\frac{x}{x^2-9}\right) \quad = \quad -f(x) \quad \text{quindi la funzione è dispari}$$

- **ricerca degli asintoti verticali**

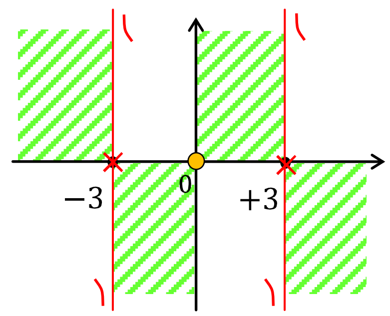
si calcola il limite sinistro e destro della funzione per x che tende ai punti di discontinuità ± 3 individuati con la ricerca del dominio:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x}{x^2-9} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +3^-} \frac{x}{x^2-9} = -\infty$$

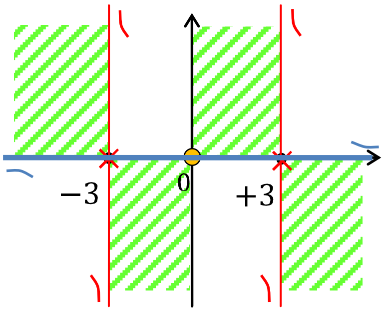
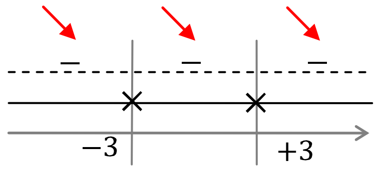
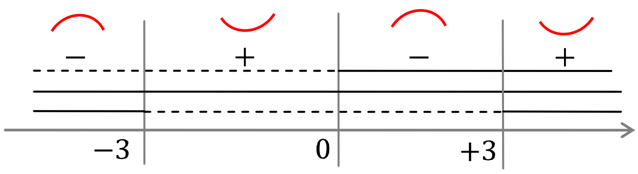
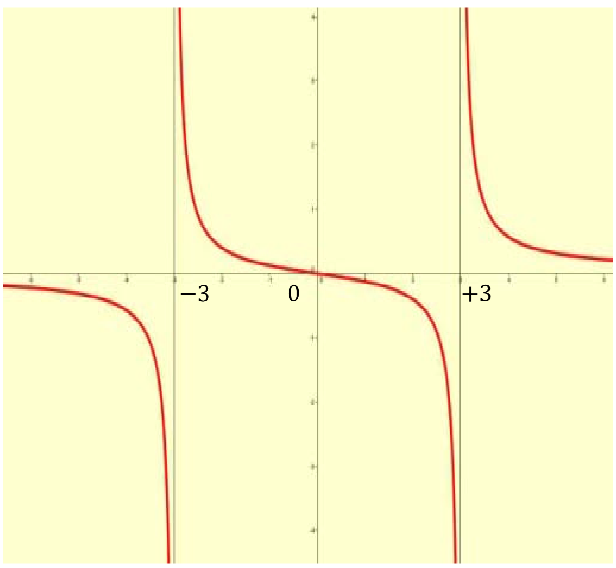
$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +3^+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty$$

esistono due asintoti verticali di equazione

$$x = -3 \quad \text{e} \quad x = +3$$



Esempi di studio del grafico di una funzione

• ricerca degli asintoti orizzontali	si calcola il limite della funzione per x che tende a $-\infty$ e a $+\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-9} = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-9} = 0$ l'asse delle x di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale per la funzione sia a $-\infty$ che a $+\infty$ La presenza dell'asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$ esclude la presenza dell'asintoto obliquo	
• studio della monotonia e dei punti di massimo e minimo	la crescenza e decrescenza della funzione si cerca studiando il segno della derivata prima della funzione, cioè si calcola la derivata prima e si pone maggiore di zero, cioè $f'(x) > 0$: $\frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2} > 0 \rightarrow \begin{cases} -x^2-9 > 0 \\ (x^2-9)^2 > 0 \end{cases} \rightarrow$ $si\ risolve\ il\ sistema \rightarrow \begin{cases} impossibile \\ \forall\ x \in \mathcal{R} - \{\pm 3\} \end{cases}$	 la derivata è sempre negativa e quindi la funzione è sempre decrescente. Non esistono massimi e minimi
• studio della concavità e dei punti di flesso	la concavità della funzione si cerca studiando il segno della derivata seconda della funzione, cioè ponendo $f''(x) > 0$: $\frac{2x\,(x^2+27)}{(x^2-9)^3} > 0 \rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ x^2+27 > 0 \\ (x^2-9)^3 > 0 \end{cases} \rightarrow$ $si\ risolve\ il\ sistema \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \forall\ x \in \mathcal{R} \\ x < -3 \quad \cup \quad x > +3 \end{cases}$ 	la derivata è negativa per $x < -3$ e $0 < x < +3$ e quindi la funzione ha concavità verso il basso; la derivata è positiva per $-3 < x < 0$ e $x > +3$ e quindi la funzione ha concavità verso l'alto. Esiste un punto di flesso di ascissa $x = 0$. Per trovarne l'ordinata basta sostituire l'ascissa nel testo della funzione: $f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad flesso\ (0{,}0)$
• disegno del grafico		si traccia il grafico della funzione tenendo conto di tutti i risultati ottenuti precedentemente. Per una maggiore precisione si possono calcolare le coordinate di alcuni punti della funzione attribuendo alla x valori arbitrari del dominio e calcolandone le corrispondenti y

Esempi di studio del grafico di una funzione

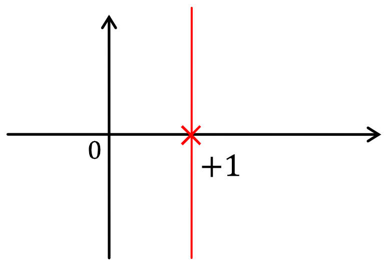
secondo esempio

Studiamo la seguente funzione $$y = \frac{x^2}{1-x}$$

- **ricerca del dominio**

si pone il denominatore diverso da zero perché la funzione assegnata è una funzione fratta:

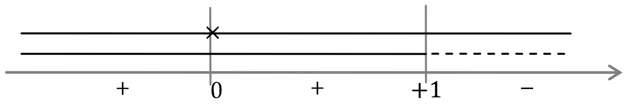
$1 - x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq +1 \quad \rightarrow \quad \forall\, x \in \mathcal{R} - \{+1\}$

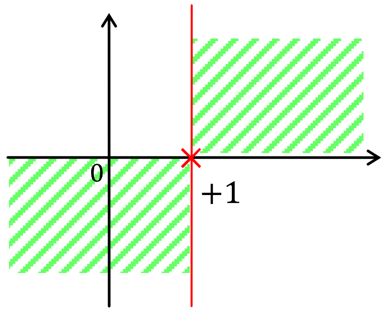


- **studio del segno**

si pone la funzione maggiore di zero e si risolve la disequazione individuando le regioni di piano dove la funzione è positiva o negativa. Si cancellano le regioni di piano dove la funzione non esiste:

$$\frac{x^2}{1-x} > 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{R} - \{0\} \\ x < 1 \end{cases}$$





- **studio delle intersezioni con gli assi cartesiani**

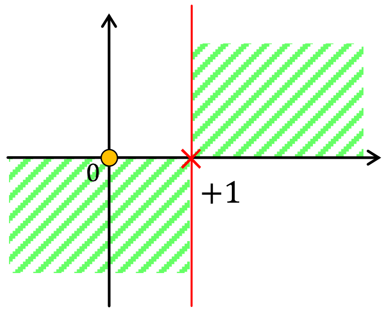
dall'osservazione del grafico dello studio del segno è evidente che la funzione non attraversa gli assi, ma presenta un solo punto di contatto coincidente con l'origine (0,0).

Solo come esercizio algebrico, studiamo l'intersezione della funzione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \frac{x^2}{1-x} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad P(0{,}0)$$

e l'intersezione della funzione con l'asse y:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow y = \frac{0}{1} \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad P(0{,}0)$$



- **studio delle simmetrie**

dall'osservazione del grafico dello studio del segno è evidente che la funzione non presenta simmetrie. Verifichiamolo anche algebricamente sostituendo la x con $-x$ nel testo della funzione e sviluppando i calcoli:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)} = \frac{x^2}{1+x} \qquad \text{con} \quad f(x) = \frac{x^2}{1-x} \qquad \text{quindi}$$

$f(-x) \neq f(x)$ la funzione non è pari

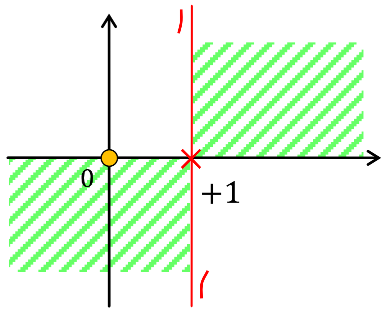
$f(-x) \neq -f(x)$ la funzione non è dispari

- **ricerca degli asintoti verticali**

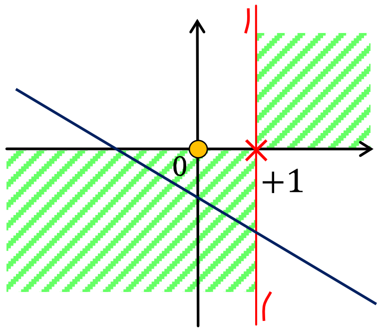
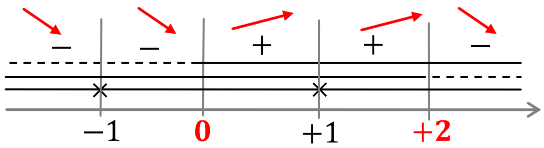
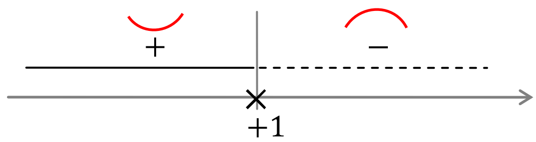
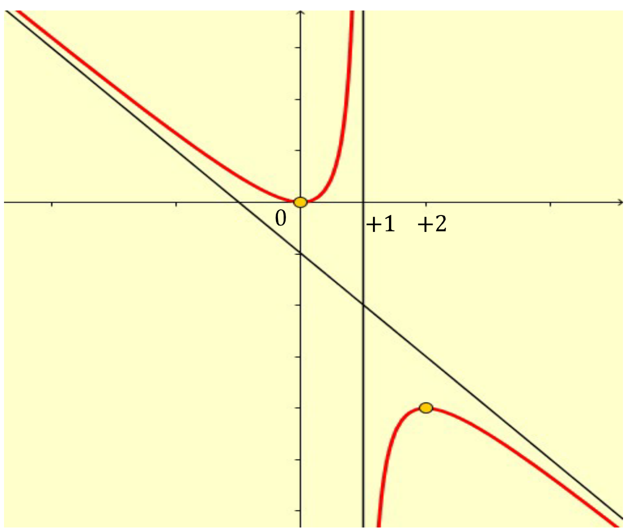
si calcola il limite sinistro e destro della funzione per x che tende al punto di discontinuità $+1$:

$$\lim_{x \to +1^-} \frac{x^2}{1-x} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +1^+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty$$

esiste un solo asintoto verticale di equazione $x = +1$



Esempi di studio del grafico di una funzione

• ricerca degli asintoti orizzontali	si calcola il limite della funzione per x che tende a $-\infty$ e a $+\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1-x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-x} = -\infty$ la funzione non presenta asintoto orizzontale né a $-\infty$ nè a $+\infty$ Ha senso ricercare l'asintoto obliquo	
• ricerca degli asintoti obliqui	si calcolano i valori del coefficiente angolare m e dell'ordinata all'origine q dell'equazione $y = mx + q$ dell'asintoto obliquo : $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} = -1$ $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-x} + x = \frac{x}{1-x} = -1$ la funzione ammette un asintoto obliquo di equazione $y = -x - 1$	
• studio della monotonia e dei punti di massimo e minimo	la crescenza e decrescenza della funzione si cerca studiando il segno della derivata prima della funzione, cioè si calcola la derivata prima e la si pone maggiore di zero, cioè $f'(x) > 0$: $\frac{x(2-x)}{(1-x)^2} > 0 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2 - x > 0 \\ (1-x)^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \\ \forall\, x \in \mathcal{R} - \{\pm 1\} \end{cases}$ 	la derivata è negativa per $x < 0$ e $x > +2$ e quindi la funzione decresce; la derivata è positiva per $0 < x < +2$ e quindi la funzione cresce. Il punto di ascissa $x = 0$ è un punto di minimo e quello di ascissa $x = +2$ è un massimo. Per trovare le rispettive ordinate basta sostituire le ascisse dei punti nel testo della funzione: $f(0) = 0 \rightarrow \min\ (0{,}0)$ $f(+2) = -4 \rightarrow \max(+2, -4)$
• studio della concavità e dei punti di flesso	la concavità della funzione si cerca studiando il segno della derivata seconda della funzione, cioè ponendo $f''(x) > 0$: $\frac{2}{(1-x)^3} > 0 \rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ (1-x)^3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{R} \\ x < 1 \end{cases}$ 	la derivata è positiva per $x < +1$ e negativa per $x > +1$ e quindi la funzione ha concavità verso l'alto per $x < +1$ e concavità verso il basso per $x > +1$. Non esistono punti di flesso perché $x = +1$ è un punto di discontinuità della funzione
• disegno del grafico		si traccia il grafico della funzione tenendo conto di tutti i risultati ottenuti precedentemente. Per una maggiore precisione si possono calcolare le coordinate di alcuni punti della funzione attribuendo alla x valori arbitrari del dominio e calcolandone le corrispondenti y