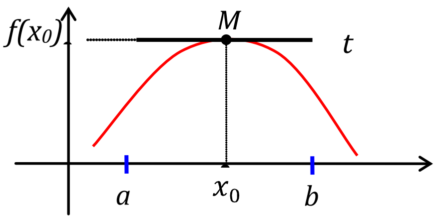
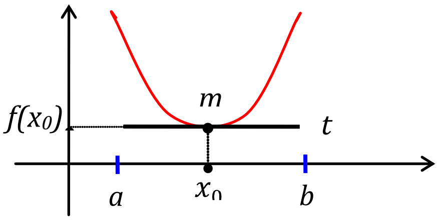
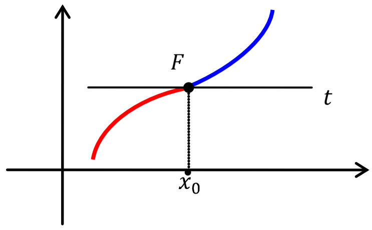
Ricerca dei punti di massimo o di minimo relativo e di flesso di una funzione

punti stazionari

Sia $y = f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$ e sia $\boldsymbol{x_0}$ un punto appartenente all'intervallo $[a, b]$.
Si dice che x_0 *è un* ***punto stazionario*** della funzione $f(x)$ se $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$
Graficamente ciò significa che la tangente al grafico nel punto stazionario è orizzontale.
I punti stazionari di una funzione sono i punti di **massimo relativo** o di **minimo relativo** o di **flesso orizzontale**

massimo relativo	minimo relativo	flesso orizzontale
		
$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ $\quad f''(x_0) < 0$	$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ $\quad f''(x_0) > 0$	$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ $\quad \boldsymbol{f''(x_0) = 0}$ $\quad \boldsymbol{f'''(x_0) \neq 0}$

più in generale per la ricerca dei punti stazionari si può seguire il seguente schema:

- si calcola la derivata prima di $f(x)$
- si pone $\boldsymbol{f'(x) = 0}$
- si risolve l'equazione ottenendo le soluzioni $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots$
- i punti $\boldsymbol{x_0},\ \boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \ldots$ possono essere punti di massimo, di minimo o di flesso orizzontale
- i punti così trovati si analizzano uno alla volta sostituendoli nelle derivate di ordine successivo
- analizziamo, ad esempio, il punto x_0 sostituendo il suo valore nella derivata seconda ed eventualmente nelle derivate successive

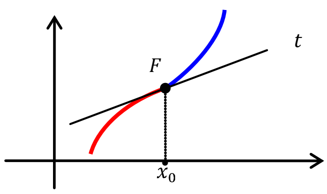
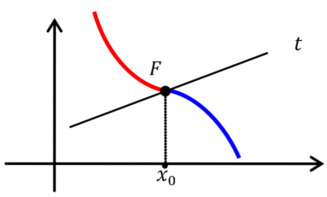
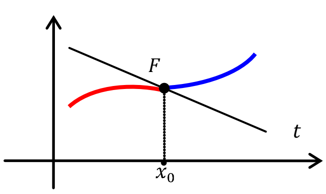
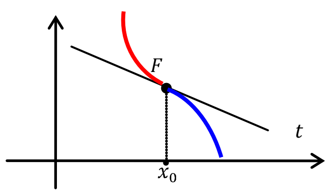
- se:
  $f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **minimo relativo**
  $f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **massimo relativo**
  $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ si calcola $f'''(x)$
- se:
  $f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **flesso orizzontale**
  $f'''(x_0) = 0 \rightarrow$ si calcola $f^{IV}(x)$
- se:
  $f^{IV}(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **minimo relativo**
  $f^{IV}(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **massimo relativo**
  $f^{IV}(x_0) = 0 \rightarrow$ si calcola $f^{V}(x)$ .... e così via

ricerca dei punti di flesso a tangente NON orizzontale

I **punti di flesso a tangente NON orizzontale** sono quei punti appartenenti al dominio della funzione che annullano la derivata seconda ma non annullano la derivata prima e non annullano la derivata terza della funzione cioè:

$$x_0 \text{ è punto di flesso } \textbf{non} \text{ a tangente orizzontale se } \begin{cases} \boldsymbol{f'(x) \neq 0} \\ \boldsymbol{f''(x) = 0} \\ \boldsymbol{f'''(x) \neq 0} \end{cases}$$

Si cercano imponendo la derivata seconda uguale a zero. I casi possibili sono:

flesso ascendente	flesso discendente	flesso ascendente	flesso discendente
			
$f'(x_0) > 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) > 0$	$f'(x_0) > 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) < 0$	$f'(x_0) < 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) > 0$	$f'(x_0) < 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) < 0$