

Elementi di topologia della retta

nome	definizione		
insieme	l'insieme è un concetto primitivo che si accetta come intuitivamente noto secondo George Cantor, il padre della teoria degli insiemi: "Per insieme si intende un raggruppamento, concepito come un tutto, di oggetti ben distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero"		
	esempi		
	$A = \{ a, b, c, d \}$ $D = (1, 5]$	$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ $E = 1 < x < 5$	$C = \{ 1, 2, 3 \} \cup \{ 6 \}$ $F = \emptyset$
intervallo	un intervallo è l'insieme di tutti i valori compresi tra due estremi (finiti o infiniti)		
	esempi		
	l'insieme $[1, 4)$ è un intervallo perché contiene tutti i numeri compresi tra 1 e 4		
fai attenzione che un intervallo è anche un insieme ma non è detto che un insieme sia un intervallo. Ad esempio l'insieme: $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ non è un intervallo perché contiene solo i quattro numeri indicati e non tutti i numeri tra 1 e 4			
intorno completo di un punto	l'intorno completo di un punto è un intervallo aperto che contiene il punto		
	esempi		
	dato il punto $x_0 = 5$ l'intervallo $(4, 8)$ è un intorno completo di 5		
intorno circolare di un punto	l'intorno circolare di un punto è un intervallo aperto di centro il punto stesso		
	esempi		
	dato il punto $x_0 = 6$ l'intervallo $(4, 8)$ è un intorno circolare di 6		
	la parte $(4, 6]$ si chiama intorno sinistro di 6 la parte $[6, 8)$ si chiama intorno destro di 6		
minimo di un insieme	il minimo di un insieme A , se esiste, è l'elemento più piccolo appartenente all'insieme. In simboli si scrive: m è il minimo di A se $\begin{cases} m \leq x & \forall x \in A \\ m \in A \end{cases}$		
	esempi		
	dato l'insieme $[2, 5)$ il minimo è 2		
	dato l'insieme $(2, 5)$ il minimo <i>non esiste</i>		
Osserva che il minimo di un intervallo esiste solo se l'intervallo è chiuso inferiormente			

Elementi di topologia della retta

massimo di un insieme	il massimo di un insieme A , se esiste, è l'elemento più grande appartenente all'insieme. In simboli si scrive: M è il massimo di A se $\begin{cases} M \geq x \quad \forall x \in A \\ M \in A \end{cases}$	
	esempi	
	dato l'insieme $(2, 5]$ il massimo è 5	
	dato l'insieme $(2, 5)$ il massimo <i>non esiste</i>	
Osserva che il massimo di un intervallo esiste solo se l'intervallo è chiuso superiormente		

minorante di un insieme	un minorante di un insieme è un qualsiasi elemento minore o uguale di tutti gli elementi dell'insieme. Il minorante, se esiste, non deve necessariamente appartenere all'insieme e non è unico	
	esempi	
	dato l'insieme $[2, 5)$ 2, 1, 0 ... sono minoranti	
	dato l'insieme $[2, 5)$ l'insieme dei minoranti è l'intervallo $(-\infty, 2]$	
	dato l'insieme $(2, 5)$ l'insieme dei minoranti è sempre l'intervallo $(-\infty, 2]$	
Osserva che l'insieme dei minoranti, se esiste, è sempre chiuso superiormente		

maggiorante di un insieme	un maggiorante di un insieme è un qualsiasi elemento maggiore o uguale di tutti gli elementi dell'insieme. Il maggiorante, se esiste, non deve necessariamente appartenere all'insieme e non è unico	
	esempi	
	dato l'insieme $[2, 5)$ 5, 6, 7... sono maggioranti	
	dato l'insieme $[2, 5)$ l'insieme dei maggioranti è l'intervallo $[5, +\infty)$	
	dato l'insieme $[2, 5]$ l'insieme dei maggioranti è sempre l'intervallo $[5, +\infty)$	
Osserva che l'insieme dei maggioranti, se esiste, è sempre chiuso inferiormente		

estremo inferiore di un insieme	l'estremo inferiore di un insieme limitato è il massimo dei minoranti dell'insieme stesso Si indica con il simbolo $inf(A)$	
	esempi	
	dato l'insieme $A = (2, 5]$ l'estremo inferiore di A è 2 in simboli: $inf(A) = 2$ infatti l'insieme dei minoranti di A è $(-\infty, 2]$ il cui massimo è 2	
		Osserva che se l'insieme non è limitato inferiormente, l'estremo inferiore è $-\infty$
	$B = (-\infty, 5] \quad inf(B) = -\infty \quad C = (1, 4] \quad inf(C) = 1 \quad D = [1, 4] \quad inf(D) = 1$	

Elementi di topologia della retta

proprietà	
<p>dato un insieme limitato A l'estremo inferiore $\inf(A)$ gode delle seguenti due proprietà:</p> <ol style="list-style-type: none"> $\inf(A) \leq x \quad \forall x \in A$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x < (\inf(A) + \varepsilon)$ 	

estremo superiore di un insieme	<p>l'estremo superiore di un insieme limitato è il minimo dei maggioranti dell'insieme stesso Si indica con il simbolo $\sup(A)$</p>
	esempi
	<p>dato l'insieme $A = (2, 5)$ l'estremo superiore di A è 5 in simboli: $\sup(A) = 5$ infatti l'insieme dei maggioranti di A è $[5, +\infty)$ il cui minimo è 5</p>
	<p> Osserva che se l'insieme non è limitato superiormente, l'estremo superiore è $+\infty$</p>
	<p>$B = (3, +\infty) \quad \sup(B) = +\infty \quad C = (3, 7] \quad \sup(C) = 7 \quad D = (3, 7) \quad \sup(D) = 7$</p>
proprietà	
<p>dato un insieme limitato A l'estremo superiore $\sup(A)$ gode delle seguenti due proprietà:</p> <ol style="list-style-type: none"> $\sup(A) \geq x \quad \forall x \in A$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x > (\sup(A) - \varepsilon)$ 	

esempi di riepilogo

<p>dato l'insieme $A = (1, 9]$ si ha che:</p>	
<ul style="list-style-type: none"> A è un intervallo limitato A è aperto inferiormente e chiuso superiormente il minimo di A non esiste, il massimo di A è 9 	<ul style="list-style-type: none"> l'insieme dei minoranti di A è l'intervallo $(-\infty, 1]$ l'insieme dei maggioranti di A è l'intervallo $[9, +\infty)$ l'estremo inferiore di A è 1, l'estremo superiore è 9

<p>dato l'insieme $B = [1, +\infty)$ si ha che:</p>	
<ul style="list-style-type: none"> B è un intervallo non limitato superiormente B è chiuso inferiormente e aperto superiormente il minimo di B è 1, il massimo di B non esiste 	<ul style="list-style-type: none"> l'insieme dei minoranti di B è l'intervallo $(-\infty, 1]$ l'insieme dei maggioranti di B è vuoto l'estremo inferiore di B è 1, l'estremo superiore è $+\infty$

<p>dato l'insieme $C = (-\infty, 2)$ si ha che:</p>	
<ul style="list-style-type: none"> C è un intervallo non limitato inferiormente C è aperto inferiormente e superiormente il minimo e il massimo di C non esistono 	<ul style="list-style-type: none"> l'insieme dei minoranti di C è vuoto l'insieme dei maggioranti di C è l'intervallo $[2, +\infty)$ l'estremo inferiore di C è $-\infty$, l'estremo superiore è 2

Elementi di topologia della retta

punto di accumulazione per un insieme

un punto x_0 si dice di accumulazione per un insieme A se **ogni** intorno del punto x_0 contiene **almeno** un elemento dell'insieme A **distinto** dal punto x_0

fai attenzione che:



- l'appartenenza del punto all'insieme **non** implica che il punto sia di accumulazione per l'insieme
- la non appartenenza del punto all'insieme **non** implica che il punto non sia di accumulazione per l'insieme

I successivi quattro esempi illustrano i possibili casi

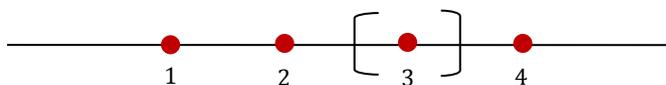
esempi

x_0 appartiene ad A x_0 è di accumulazione per A	sia $x_0 = 3$ ed $A = (2, 6)$	
	3 appartiene ad A ed è di accumulazione	
x_0 non appartiene ad A x_0 è di accumulazione per A	sia $x_0 = 2$ ed $A = (2, 6)$	
	2 non appartiene ad A ed è di accumulazione	
x_0 non appartiene ad A x_0 non è di accumulazione per A	sia $x_0 = 1$ ed $A = (2, 6)$	
	1 non appartiene ad A e non è di accumulazione	
x_0 appartiene ad A x_0 non è di accumulazione per A	sia $x_0 = 1$ ed $A = \{1\} \cup (2, 6)$	
	1 appartiene ad A e non è di accumulazione	

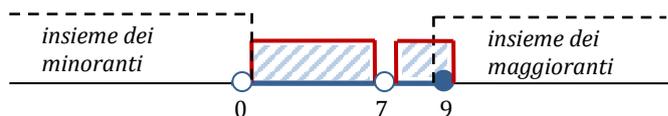
un punto che appartiene ad un insieme ma non è di accumulazione per l'insieme stesso si dice **punto isolato**

ulteriori esempi

dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ nessuno dei quattro elementi di A è un punto di accumulazione per A .
 Infatti, scelto ad esempio l'elemento 3, esiste un suo intorno $(2,5, 3,5)$ che non contiene alcun elemento di A distinto da 3 stesso. Analoga conclusione per gli altri tre elementi di A



dato l'insieme $B = (0, 7) \cup (7, 9]$ si ha che



- il minimo di B non esiste, il massimo è 9
- l'insieme dei minoranti di B è $(-\infty, 0]$
- l'insieme dei maggioranti di B è $[9, +\infty)$
- l'estremo inferiore è 0

- l'estremo superiore 9
- 0 e 9 sono di accumulazione per B
- 7 è di accumulazione per B
- tutti i numeri tra 0 e 9 sono di accumulazione per l'insieme B